Des faits !

Le théorème d'incomplétude et d'indécidabilité de Gödel

• L'espoir en des mathématiques parfaites

En 1920, le mathématicien David Hilbert propose des recherches sur le fondement même des mathématiques.

Le premier but était la complétude des mathématiques : montrer qu'à partir d'un nombre fini de définitions et d'axiomes, en appliquant les règles de logique, on pourrait théoriquement démontrer toutes les propriétés de l'arithmétique. A la limite, si nous implémentions dans un ordinateur les définitions, les axiomes et les règles de logique et que nous le faisions mélanger le tout suffisamment longtemps, il découvrirait une démonstration de n'importe quel théorème.

Le deuxième but était la consistance des mathématiques : montrer que l'arithmétique était cohérente, c'est-à-dire qu'à partir de nos définitions, axiomes et règles de logique, aucune contradiction n'était possible.

En 1929, Kurt Gödel démontre un théorème qui va dans le sens espéré par David Hilbert : on ne pourra pas trouver de nouveaux principes de raisonnements purement logiques autres que ceux que nous connaissons déjà. Nous avons donc l'outil logique complet. Si nous nous trouvons devant une propriété indémontrable dans notre système de raisonnement, ce n'est pas par faute d'outil, c'est qu'elle est vraiment indémontrable.

• Le théorème d'incomplétude

En 1931, Kurt Gödel démontre son théorème d'incomplétude qui va sonner le glas des espoirs de Hilbert. Il contient deux conclusions extrêmement importantes :

1. **Il y a des énoncés mathématiques que l'on ne peut ni démontrer ni réfuter dans une théorie donnée, quels que soient les axiomes.**
2. **On ne peut prouver la cohérence d'une théorie mathématique à l'intérieur de cette théorie.**

La première partie de ce théorème d'incomplétude montre de manière cruelle que certains énoncés résisteront toujours aux mathématiciens : ils sont indécidables au sein de la théorie développée. On peut aussi dire que la vérité mathématique n'est pas axiomatisable avec un nombre fini d'axiomes.

La deuxième partie nous dit qu'en restant à l'intérieur de l'arithmétique, on ne pourra jamais être sûrs de ne pas rencontrer de contradictions.

L'onde de choc n'a pas fini de perturber les mathématiciens mais ne semble pas encore avoir atteint les chercheurs des autres sciences qui pensent avoir avec les mathématiques un outil parfait.

• Une proposition indécidable en géométrie

Dans la géométrie euclidienne, on part de définitions et d'axiomes pour démontrer les propriétés des objets géométriques. Dans cette construction logique, Euclide a réussi à démontrer que par un point extérieur à une droite donnée passe une parallèle à cette droite. Par contre, il n'a pas réussi à démontrer que cette droite est unique, ce qui intuitivement est évident.

C'est une proposition indécidable à partir des axiomes de base d'Euclide. On peut choisir de la considérer comme vraie, en faire un nouvel axiome, ce qui satisfera notre intuition et donnera la géométrie que nous utilisons dans la vie de tous les jours. Mais ce choix n'est aucunement dicté par la théorie elle-même.

On peut aussi décider de postuler comme axiome qu'il existe une infinité de droites parallèles à une droite donnée en un point donné et construire une géométrie qui est alors non-euclidienne. Et cela marche! L'astrophysique utilise à grande échelle une géométrie non euclidienne.

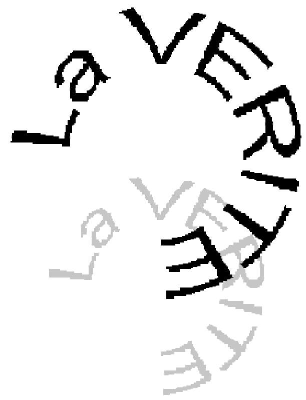
Notre existence a-t-elle un SENS?

Émergence d'un paradigme qui « réenchante » le monde.

Leur interprétation ?

• La vérité mathématique

La question qui se pose est celle de la vérité en mathématique. Quelle est la "vraie" géométrie? Comment peut-on faire confiance aux mathématiques, sachant que celles-ci ne pourront jamais assurer leur cohérence et qu'elles se heurteront toujours à des propositions indécidables? Les sciences n'utilisent-elles pas un outil défectueux?



Évidemment, se pose aussi la question de la nature du monde mathématique. Est-il un monde intrinsèque que l'homme découvre ou un monde que l'homme construit?

Se pose la question du rapport entre le monde mathématique et la réalité, puisque, comme le disait Galilée, « le livre de la nature est écrit dans un langage mathématique ». Les mathématiques sont-elles sous-jacentes à la réalité qui nous entoure ou sont-elles dues à notre manière d'appréhender cette réalité?

En sciences, ces questions sont primordiales. Puisque ses outils sont les mathématiques, si celles-ci "font partie" de la réalité, nous avons accès à cette réalité. Si la réalité n'est pas mathématique mais que seule notre manière de voir la réalité est mathématique, que savons-nous de la réalité?

Pour Staune, ce que Gödel a démontré, « c'est la transcendance de la vérité par rapport à la notion de démonstration et le fait que nous puissions avoir accès à des vérités non démontrables dans un système donné. (cf. [0] p. 431) »

• En guise de conclusion provisoire

« Ce qu'il y a de plus incompréhensible dans l'univers, c'est qu'il soit compréhensible » disait Einstein. Dans un langage mathématique, pourrions-nous ajouter.

« D'une certaine façon, il est remarquable que les mathématiques aient survécu en tant que discipline. Cela est en grande partie dû au bon sens: une très grand partie des mathématiques semble fonctionner admirablement, et il serait par trop déraisonnable d'abandonner un sujet qui rencontre de pareils succès, même s'il existe des régions traîtresses au plus profond de sa structure. Les mathématiciens pragmatiques poursuivent leurs travaux sans s'inquiéter ni se soucier des fissures dans les profondeurs, dont ils présument qu'il est très improbable qu'elles se propagent jusqu'à la surface. La seconde raison est, bien entendu, que les mathématiques sont bien trop efficaces, et qu'elles sont le langage par excellence qui permet de décrire le monde physique. Sans les mathématiques, plus de science, plus de commerce, ni de transports, ni d'industrie, ni de communications. (cf. [1] p. 405) »

• Pour aller plus loin

[1] P. Atkins, "Le doigt de Galilée, dix grandes idées pour comprendre la science", Dunod, 2004.

Groupe de branche de MATHÉMATIQUE du LCC
en collaboration avec le prof. Jean Staune

N°13 A suivre...